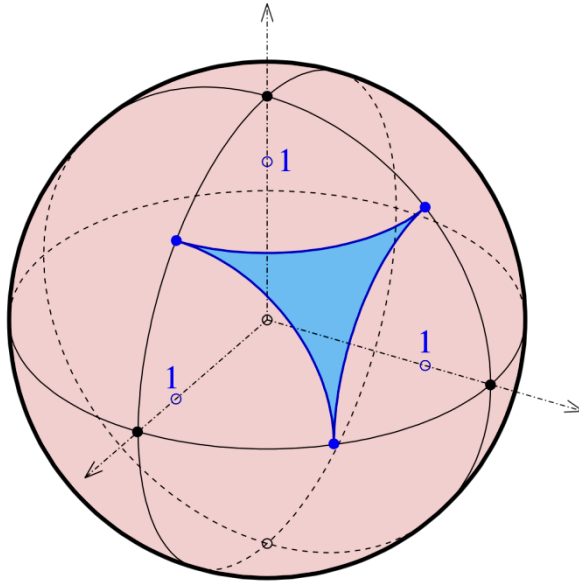


Egy furcsa háromszög területéről

Már régebben találkoztunk az interneten az 1. ábrával.



1. ábra – forrása: [1]

Ezzel kapcsolatos az alábbi feladatunk.

Feladat

Határozzuk meg az 1. ábrán látható kék háromszög területét!

Ezt az idomot úgy kapjuk, hogy az $R = \sqrt{2}$ (m) sugarú gömb egyik ténnyolcadba eső részét elmetsszük az $x = 1$ (m) , $y = 1$ (m) és a $z = 1$ (m) síkokkal.

Megoldás

A keresett $F_{kék}$ felszín ismert gömbreszek felszínének különbségeként állítható elő:

$$F_{kék} = \frac{1}{8} \cdot F_{gömb} - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot F_{gömbszelet} \quad . \quad (1)$$

Az [1] forrás szerint:

$$F_{gömb} = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \quad , \quad F_{gömbszelet} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h \quad , \quad (2)$$

ahol h : a gömbszelet magassága.

Most (1) és (2) szerint:

$$F_{kék} = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2 - \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot R \cdot h = \frac{\pi}{2} \cdot R \cdot (R - 3 \cdot h) \quad ,$$

tehát:

$$\underline{F_{kék} = \frac{\pi}{2} \cdot R \cdot (R - 3 \cdot h) .} \quad (3)$$

A számszerű adatok a feladat szövegéből és az ábrából:

$$R = \sqrt{2} \text{ (m) } , \quad h = \sqrt{2} - 1 \text{ (m) } . \quad (A)$$

Majd (3) és (A) szerint:

$$F_{kék} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot [\sqrt{2} - 3 \cdot (\sqrt{2} - 1)] \text{ (m}^2\text{)} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \text{ (m}^2\text{)} ,$$

$$\underline{\underline{F_{kék} \approx 0,381 \text{ (m}^2\text{)} .}} \quad (E)$$

Tehát a kék gömbi háromszög felszíne mintegy **0,381 m²** nagyságú.

Megjegyzések:

M1. A szimmetria miatt itt mindegy, hogy a gömb középpontjában elhelyezett **Oxyz** koordináta - rendszer melyik tengelye az **x**, az **y** és a **z** tengely.

M2. A mondott háromszög egy görbevonalú háromszög, mely a gömb felületén helyezkedik el, így területe helyett inkább a kékre színezett gömbdarab felszínéről kell beszélni.

M3. Az 1. ábra a merőleges axonometria elméletéhez készített szemléltető / magyarázó ábra. Ugyanis a merőleges axonometria **q_x**, **q_y**, **q_z** tengely menti rövidülési együtthatóira – mint dimenzió nélküli viszonzszámokra – fennállnak az alábbi kapcsolatok:

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 2 , \quad (a)$$

$$0 \leq (q_x , q_y , q_z) \leq 1 . \quad (b)$$

Ha az 1. ábra koordináta - tengelyeire a **q_x**, **q_y**, **q_z** rövidülési együtthatókat hordjuk fel, akkor a **q** (**q_x**, **q_y**, **q_z**) vektor végpontja (a) szerint egy $\sqrt{2}$ sugarú gömb felületén helyezkedik el; ám a (b) korlátozások miatt ennek csak a kékre színezett háromszöghöz tartozó számhármasai jöhetnek szóba, a tényleges axonometrikus ábrázoláshoz.

Ha (b) - ben a **0** és az **1** határok is megengedettek, akkor az axonometrikus képek elől - , oldal - és felülnézeti képekbe mennek át.

Valójában az 1. ábra egy nagyon hasznos és szép geometriai szemléltetése a rövidülési együtthatók közt fennálló viszonyoknak. Az 1. ábrával még nem találkoztunk máshol.

Források:

[1] – https://de.wikipedia.org/wiki/Orthogonale_Axonometrie

[2] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczy Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2021. 10. 17.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>